

Hong Kong Mathematics Olympiad (2006 – 2007)

Heat Event (Individual)

香港數學競賽 (2006 – 2007)

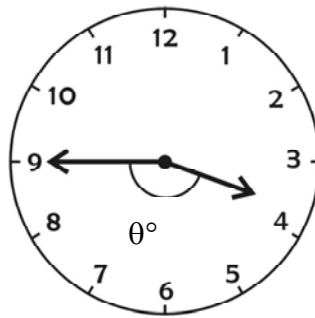
初賽項目(個人)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest form.

1. 如圖一，時鐘顯示着三時四十五分。若時針與分針的交角是  $\theta^\circ$ ，求  $\theta$  的值。

In Figure 1, a clock indicates the time 3:45. If the angle between the hour-hand and the minute-hand is  $\theta^\circ$ , find the value of  $\theta$ .

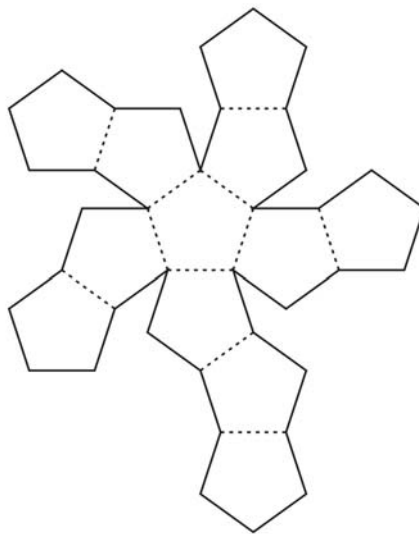


圖一

Figure 1

2. 如圖二的摺紙圖樣能摺出一個正多面體。若該正多面體有  $y$  條棱，求  $y$  的值。

In Figure 2, there is a paper net that can be wrapped into a regular polyhedron. If this polyhedron has  $y$  edges, find the value of  $y$ .



圖二

Figure 2

3. 在 4 本英文書、6 本中文書及 9 本日文書中任取兩本。已知這兩本書是相同語言的。若有  $X$  個不同的選擇，求  $X$  的值。

Among 4 English books, 6 Chinese books and 9 Japanese books, two books are selected. It is found that they are of the same language. If there are  $X$  such choices, find the value of  $X$ .

4. 設  $r_1$  和  $r_2$  是方程  $(x-2006)(x-2007)=2007$  的兩個實根。若  $r$  是方程  $(x-r_1)(x-r_2)=-2007$  較小的實根，求  $r$  的值。

Let  $r_1$  and  $r_2$  be the two real roots of the equation  $(x-2006)(x-2007)=2007$ . If  $r$  is the smaller real root of the equation  $(x-r_1)(x-r_2)=-2007$ , find the value of  $r$ .

5. 已知  $\alpha$  及  $\beta$  是方程  $x^2-5^{2007}x+5^{1000}=0$  的根。若  $s=\log_{25}\frac{\alpha^2}{\beta}+\log_{25}\frac{\beta^2}{\alpha}$ ，求  $s$  的值。

Given that  $\alpha$  and  $\beta$  are the roots of the equation  $x^2-5^{2007}x+5^{1000}=0$ . If  $s=\log_{25}\frac{\alpha^2}{\beta}+\log_{25}\frac{\beta^2}{\alpha}$ , find the value of  $s$ .

6. 對任意實數  $a$ 、 $b$ 、 $c$  及  $d$ ，定義運算  $*$ ：

$$(a, b) * (c, d) = (ad + bc, bd).$$

若  $(x, y) = \left(1, \frac{3}{7-\sqrt{5}}\right) * (8+\sqrt{5}, 3)$  及  $a = \frac{x}{y}$ ，求  $a$  的值。

For any real number  $a$ ,  $b$ ,  $c$  and  $d$ , we define the operation  $*$ :

$$(a, b) * (c, d) = (ad + bc, bd).$$

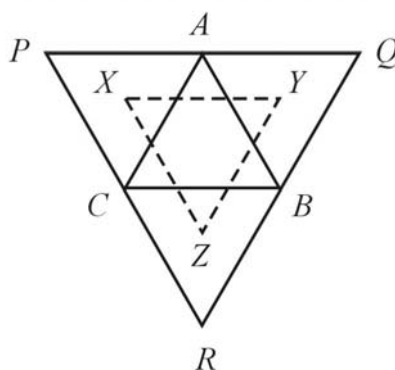
If  $(x, y) = \left(1, \frac{3}{7-\sqrt{5}}\right) * (8+\sqrt{5}, 3)$  and  $a = \frac{x}{y}$ , find the value of  $a$ .

7. 已知  $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{5}$  及  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ 。若  $\tan \alpha = B$ ，求  $B$  的值。

Given that  $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{5}$  and  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ . If  $\tan \alpha = B$ , find the value of  $B$ .

8. 如圖三， $\triangle PAC$ 、 $\triangle QBA$ 、 $\triangle RCB$  及  $\triangle ABC$  皆是等邊三角形。點  $X$ 、 $Y$  及  $Z$  分別為  $\triangle PAC$ 、 $\triangle QBA$  及  $\triangle RCB$  的內心。若  $PA$  的長度是 10 cm 及  $\triangle XYZ$  的周界是  $w$  cm，求  $w$  的值。(註：三角形的內心為該三角形三條內角平分線的交點。)

In Figure 3,  $\triangle PAC$ ,  $\triangle QBA$ ,  $\triangle RCB$  and  $\triangle ABC$  are equilateral triangles. The points  $X$ ,  $Y$  and  $Z$  are the incentre of  $\triangle PAC$ ,  $\triangle QBA$  and  $\triangle RCB$  respectively. If the length of  $PA$  is 10 cm and the perimeter of  $\triangle XYZ$  is  $w$  cm, find the value of  $w$ . (Remark: the incentre of a triangle is the point of intersection of the three interior angle bisectors of the triangle.)



圖三

Figure 3

9. 設  $f(x) = \frac{1}{2}(4x^2 - 60x + 9 + |4x^2 - 60x + 9|)$ ，若  $k = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(15) + f(16)$ ，求  $k$  的值。

Let  $f(x) = \frac{1}{2}(4x^2 - 60x + 9 + |4x^2 - 60x + 9|)$ . If  $k = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(15) + f(16)$ , find the value of  $k$ .

10. 在平面上點  $P$  的坐標是  $(-3, 4)$ 。以  $(0, 0)$  為中心，點  $P$  順時針方向旋轉  $45^\circ$  後，再沿  $y$ -軸反射到達點  $Q = (x, y)$ 。若  $z = x + y$ ，求  $z$  的值。

The coordinates of point  $P$  on the plane is  $(-3, 4)$ . After rotating  $45^\circ$  clockwise about the centre  $(0, 0)$  and reflecting along the  $y$ -axis, the point  $P$  reaches the point  $Q = (x, y)$ . If  $z = x + y$ , find the value of  $z$ .